Know How: Wie berechnet der ProfilMaker Querschnittswerte und Beanspruchungen?

In der letzten mb-news Nr. 1/2001 haben wir den ProfilMaker zur Berechnung von Querschnittswerten zum ersten Mal vorgestellt.

In dem Artikel wurde erläutert, wie man mit dem ProfilMaker arbeitet und welche Ergebnisse ausgegeben werden können. Viele Kunden und Leser haben uns inzwischen gefragt: *„Wie berechnet der ProfilMaker diese Querschnittswerte?* Diese Frage werden wir in dem folgenden Beitrag beantworten.

In der nächsten mb-news Nr. 3/2001 wird ein weiterer Artikel erläutern, welche Möglichkeiten es gibt, die Berechnung zu steuern.

Dipl.-Ing. Norbert Löppenberg
Entwicklungsleiter Ingenieurbau
mb Software AG

1. Aufgabenstellungen für den ProfilMaker

Für die komplexe Stabwerksanalyse und -bemessung können mit dem ProfilMaker folgende Berechnungen durchgeführt werden:

- Berechnung geometrischer Querschnittswerte, die auf der Hypothese der ebenen Querschnitte basieren: Fläche, Trägheitsmomente und -radien, Widerstandsmomente usw.
- Berechnung der Normalspannungsverteilung im Querschnitt im elastischen Zustand unter Normalkraft- und Biegebeanspruchung
- Berechnung der Lage der Nulllinie und der Grenzwerte der Schnittgrößen im elastisch-plastischen Zustand unter Normalkraft- und Biegebeanspruchung
- Berechnung der Schubspannungsverteilung im Querschnitt im elastischen Zustand unter Biegeschubbeanspruchung
- Berechnung der Torsionssteifigkeit und der Schubspannungsverteilung infolge Torsionsbeanspruchung im elastischen Zustand
- Berechnung der Wölbgrößen (Cm, W usw.) und der Normal- und Schubspannungsverteilung infolge der Wölbkrafttorsion

Bei der Berechnung der Schubspannungen infolge Biegetorsion wird im ProfilMaker auf vereinfachende Annahmen verzichtet und stattdessen die Untersuchung des Querschnitts mit der FE-Methode vorgenommen.

2. Berechnungsgrundlagen

Bild 1 zeigt das Koordinatensystem und die positiven Richtungen der Schnittgrößen.

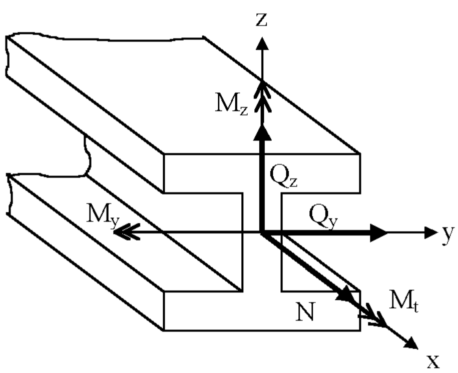

Bild 1

2.1 Normalkraft- und Biegebeanspruchung

2.1.1. Elastischer Zustand

Im elastischen Zustand werden die Normalspannungen gemäß der Hypothese der ebenen Querschnitte mit der Gleichung ermittelt [2]:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_*^2}(z - z_c) + \frac{M_y I_{yz} - M_z I_y}{I_*^2}(y - y_c) \qquad (1)$$

Hierin sind:

$$A = \iint_s ds \qquad \text{Querschnittsfläche,}$$

$$I_y = \iint_s (z - z_c)^2 ds\,, \quad I_z = \iint_s (y - y_c)^2 ds\,,$$

$$I_{yz} = \iint_s (z - z_c)(y - y_c) ds$$

$$I_* = \sqrt{I_y I_z - I_{yz}^2}\,, \qquad (2)$$

Trägheitsmomente,

y_c, z_c Schwerpunktskoordinaten des Querschnittes.

2.1.2. Elastisch-plastischer Zustand

Betrachtet werden die Schnittgrößen *N*, M_y , M_z. Bei der proportionalen Vergrößerung dieser Größen zu Grenzschnittgrößen wird die Querschnittsfläche durch die Nulllinie mit der Gleichung $ay + bz + 1 = 0$ in zwei Bereiche geteilt, in denen die Zug- und Druckfließspannungen σ_{yd} wirken. Daraus ergeben sich die folgenden Grenzschnittgrößen:

$$N^* = K_{plast} N\,,$$

$$M_y^* = K_{plast} M_y\,,$$

$$M_z^* = K_{plast} M_z\,.$$

Die Parameter der Nulllinie *(a, b)* und der Sicherheitsbeiwert K_{plast} werden aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt:

$$\sigma_{yd}(S_- - S_+) = N^*,$$

$$\sigma_{yd}\left(\iint_{S_-}(z-z_c)ds - \iint_{S_+}(z-z_c)ds\right) = M_y^*,$$

$$\sigma_{yd}\left[\iint_{S_-}(y-y_c)ds - \iint_{S_+}(y-y_c)ds\right] = M_z^*. \tag{3}$$

2.2 Schubspannungen infolge Biegeschubbeanspruchung

Bei einer Biegeschubbeanspruchung ändern sich die Normalspannungen über die Stablänge. Dadurch entstehen Querschnittsverwölbungen und Schubspannungen.

In Bild 2 wird das Gleichgewicht eines Streifens betrachtet, der aus einem Stab herausgeschnitten wird, in dem die Verteilung der Normalspannungen schon bekannt ist:

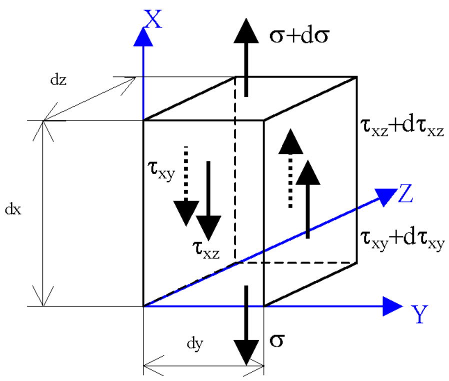

Bild 2

Bei der Projektion der Kräfte auf die x-Achse erhalten wir eine Gleichung:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

Wir betrachten die Wölbfunktion ω *(y, z)*, welche die Normalverschiebungen der Querschnittpunkte darstellt. Diese Verschiebungen entstehen infolge der veränderlichen Normalspannungen. Die Schubspannungen werden über diese Funktion wie folgt ausgedrückt:

$$\tau_{xy} = G\frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = G\frac{\partial \omega}{\partial z}$$

mit Schubmodul G. (5)

Die Gleichungen (4), (5) gemeinsam mit den Randbedingungen des Umrisses, der den Querschnitt umschließt:

$$\tau_{xy}\cos(n,y) + \tau_{xz}\cos(n,z) = 0 \tag{6}$$

bilden eine Randwertaufgabe. Nach der Lösung dieser Aufgabe ermittelt man die Wölbfunktion und dann die Verteilung der Schubspannungen. Die äquivalente Variationsformulierung der Gleichung (4) - (6) bildet eine Bedingung des Minimums des Funktionals:

$$I\left(\omega, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial \omega}{\partial z}\right) =$$

$$\iint_S \left\{\frac{G}{2}\left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{\partial \sigma}{\partial x}\,\omega\right\} ds \tag{7}$$

Es ist einfach festzustellen, dass aus den Euler-Gleichungen für (7) die Gleichungen (4), (5) folgen, und aus den natürlichen Randbedingungen - die Gleichung (6). In den Gleichungen (4) und (7) gibt es eine Ableitung der Normalspannungen der Biegung über die Längskoordinate. Mit Verwendung von (1) und unter Beachtung, dass:

$$Q_y = -\frac{dM_z}{dx}, \quad Q_z = -\frac{dM_y}{dx} \tag{8}$$

erhält man als Ausdruck für diese Ableitung:

$$\frac{d\sigma}{dx} = Q_y\left[\frac{I_y}{I_*^2}(y-y_c) - \frac{I_{yz}}{I_*^2}(z-z_c)\right] +$$

$$Q_z\left[\frac{I_z}{I_*^2}(z-z_c) - \frac{I_{yz}}{I_*^2}(y-y_c)\right] \tag{9}$$

Einer der erforderlichen Querschnittswerte, der bei den Berechnungen infolge Biegeschubbeanspruchung verwendet wird, ist die effektive Querkraftfläche.

Wir nehmen an, dass im Querschnitt die Querkraft Q_y wirkt. Die verallgemeinerte Deformation, die dieser Kraft entspricht, ist der effektive Schubwinkel γ^* (Gleitung). Wenn man die Randwertaufgabe (4) - (6) mit Berücksichtigung von (9) löst, und die Arbeit der Kraft Q_y auf der verallgemeinerten Deformation γ^* der Verformungsenergie angleicht, dann erhält man [2]:

$$\gamma^* = \frac{\frac{1}{G}\iint_S\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2\right)ds}{Q_y} \tag{10}$$

Es ist klar, dass die Gleitung γ^* proportional Q_y ist. Der Kehrwert des Proportionalitätsfaktors, der die Dimension einer Fläche hat, wird Querkraftfläche genannt:

$$A_y = \frac{Q_y^2}{\iint_S\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2\right)ds}\;;$$

$$A_z = \frac{Q_z^2}{\iint_S\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2\right)ds} \tag{11}$$

2.3 St. Venantsche Torsion

Zur Definition der Werte der wölbfreien Torsion wird die klassische Aufgabe von St. Venant gelöst. Diese Aufgabe besteht aus der Gleichgewichtsbeziehung [1]

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \tag{12}$$

aus den Beziehungen zwischen primären Schubspannungen und Wölbfunktion:

$$\tau_{xy} = G\theta\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z\right), \quad \tau_{xz} = G\theta\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y\right)$$

mit Verdrillung θ (13)

und der Randbedingungen (6) auf dem Querschnittsumriss.

Die äquivalente Variationsformulierung der Aufgabe besteht in der Forderung der Minimierung des Funktionals:

$$J = \iint_S \left\{ \frac{G}{2}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2 \right] \right\} ds -$$

$$\oint_\Gamma \{ [z\cos(n,y) - y\cos(n,z)]\omega \} dl \quad (14)$$

Hierin sind:

Γ Querschnittsumriss,

n Querschnittsnormale.

Das Trägheitsmoment der wölbfreien Torsion wird über die gefundene Wölbfunktion ermittelt:

$$I_t = \iint_S \left[y^2 + z^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2 \right] ds \quad (15)$$

2.4 Wölbkrafttorsion

Zur Berechnung der Parameter der Wölbkrafttorsion wird die Wölbfunktion verwendet, die bei der Berechnung der wölbfreien Torsion ermittelt wurde. Der in der klassischen Torsionstheorie der dünnwandigen Stäbe des offenen Profils übliche Begriff der Sektorfläche ist die vereinfachte Idealisierung der Wölbfunktion für den Fall, dass die Verwölbung nur von einer Koordinate abhängt, die über die Mittellinie des dünnwandigen Profils gemessen wird. Durch die Verwendung der FE-Methode bei der Lösung der Aufgabe der Elastizitätstheorie können solche Einschränkungen entfallen. Dabei ist es möglich, die Werte der Wölbtorsion über die Wölbfunktion zu ermitteln.

Die Ausdrücke der statischen Sektormomente sehen wie folgt aus [2]:

$$S_\omega = \iint_S \omega ds, S_{y\omega} = \iint_S z\omega ds, S_{z\omega} = \iint_S y\omega ds \quad (16)$$

Die Koordinaten des Schubmittelpunktes werden mit den Gleichungen ermittelt:

$$y_m = \frac{I_z S_{y\omega} - I_{yz} S_{z\omega}}{I_*^2},$$
$$z_m = \frac{I_y S_{z\omega} - I_{yz} S_{y\omega}}{I_*^2} \quad (17)$$

und der Wölbwiderstand mit der Gleichung:

$$C_m = \iint_S \omega^2 ds \quad (18)$$

Die Normalspannungen infolge Wölbkrafttorsion werden wie folgt ermittelt:

$$\sigma = \frac{B_\omega}{C_m}\omega \quad (19)$$

Hierin ist B_ω das einzugebende Bimoment.

Für die Ermittlung der Schubspannungsverteilung infolge Wölbkrafttorsion muss die Aufgabe (4) - (6) gelöst werden, dabei werden als Belastung die Normalspannungen verwendet, die aus (19) ermittelt wurden.

2.5 Ermittlung der Grenzwerte

2.5.1 Elastischer Grenzzustand

Zum Vergleich mit der Fließgrenze wird das MISES-Kriterium verwendet; gemäß diesem Kriterium werden die Vergleichsspannungen nach der folgenden Formel ermittelt:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (20)$$

Hierin ist:

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$$

Schubspannungen

Die Schubspannungen τ_{xy}, τ_{xz} werden als Summe der Spannungen ermittelt, die aus der Lösung der Gleichungen (12), (13) und der Gleichungen (4) - (6) erhalten werden. Dabei ist σ als Summe von (1) und (19) ermittelt.

Somit:

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(Q_y, Q_z, M_t, M_\omega)$$
$$\tau_{xz} = \tau_{xz}(Q_y, Q_z, M_t, M_\omega) \quad (21)$$

Hier ist die Gleichung (8) berücksichtigt, sowie der Ausdruck für das Wölbmoment:

$$M_\omega = \frac{dB_\omega}{dx} \quad (22)$$

Der Sicherheitsbeiwert der Schubspannungen wird wie folgt ermittelt:

$$K_\tau = \frac{\sigma_{yd}}{\sqrt{3}\tau_{\max}} \quad (23)$$

Die Normalspannungen werden als Summe von (1) und (19) ermittelt.

$$\sigma = \sigma(N, M_y, M_z, B_\omega) \quad (24)$$

Der Sicherheitsbeiwert der Normalspannungen ergibt sich aus:

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{yd}}{\sigma_{\max}} \quad (25)$$

Die Vergleichsspannungen werden nach der Gleichung (20) ermittelt, und der entsprechende Sicherheitsbeiwert sieht wie folgt aus:

$$K_v = \frac{\sigma_{yd}}{\sigma_{v\max}} \quad (26)$$

2.5.2 Plastische Grenzschnittgrößen

Grenzwerte des Zustandes des plastischen Fließens werden bei der Wirkung der Normalkraft und Biegung mit der Lösung des Systems der nichtlinearen Gleichungen (3) berechnet. So werden die plastischen Schnittgrößen N_{pl}, M_{ply}, M_{plz} ermittelt und damit die plastischen Widerstandsmomente:

$$W_{ply} = \frac{M_{ply}}{\sigma_{yd}}\,;\; W_{plz} = \frac{M_{plz}}{\sigma_{yd}} \qquad (27)$$

Die Berücksichtigung des Wölbmomentes im Zustand des plastischen Fließens ist nicht realisiert.

Die Grenzwerte der Schubkräfte im Zustand des plastischen Fließens werden über die Querkraftflächen ermittelt (11):

$$V_{ply} = \frac{\sigma_{yd}}{\sqrt{3}} A_y\,;\; V_{plz} = \frac{\sigma_{yd}}{\sqrt{3}} A_z \qquad (28)$$

3. Berechnungsalgorithmus

Die Aufgaben, die vom Programm ProfilMaker gelöst werden, können in zwei Teile unterteilt werden: einfache und komplexe Berechnungen.

3.1 Einfache Berechnungen

Zu diesem Abschnitt gehört die Berechnung der Werte für Normalkraft- und Biegebeanspruchung (2) und der abgeleiteten Trägheitsradien:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}\,;\; i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \qquad (29)$$

sowie der Widerstandsmomente:

$$W_y = \frac{I_y}{|z|_{\max}}\,;\; W_z = \frac{I_z}{|y|_{\max}} \qquad (30)$$

Die Auswertung dieser einfachen Integrale ist unproblematisch.

3.2 Komplexe Berechnungen

Zu dieser Kategorie gehören alle Berechnungen, die mit den Schubspannungen und mit den Normalspannungen infolge Wölbkrafttorsion zusammenhängen. Diese Aufgaben werden mit der FE-Methode gelöst, die im ProfilMaker folgende Merkmale hat:

- Es werden Dreieckelemente und isoparametrische Viereckelemente verwendet.
- Die Ergebnisse für die Spannungen werden in den Netzknoten gemittelt und im weiteren für die Interpolation innerhalb der Elemente benutzt.
- Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt mit Hilfe des Gleichungslösers von **MicroFe**.

3.3 Nichtlineare Berechnungen

Zu dieser Gruppe gehören die Berechnungen von M_{pl} und W_{pl} sowie die Berechnung der Lage der Nulllinie und des Sicherheitsbeiwertes im plastischen Zustand unter Normalkraft- und Biegebeanspruchung.

Zur Ermittlung dieser Parameter wird das nichtlineare Gleichungssystem (3) mit drei Unbekannten gelöst.

Als Anfangslage der Nulllinie wird die Nulllinie der elastischen Aufgabe festgelegt. Darüber hinaus wird im Programm die Methode von Melder-Mid [3] (Methode des verformten Polyeders) zur Suche der Lösung des Gleichungssystems und eine der Varianten der Methode von Monte Carlo zur Suche der Anfangsnäherung verwendet.

Dr.-Ing. Zaren Zebelian
Abteilungsleiter
EuroSoft GmbH, Moskau

Überarbeitung:

Dr.-Ing. Dorian Lutzkanov
Dr.-Ing. Jochen Weise
mb Software AG
Geschäftsstelle Dresden

Literaturhinweise zum Artikel "Know How: Wie berechnet der ProfilMaker Querschnittswerte und Beanspruchungen?":

[1]
S. P. Timoshenko, J. N. Goodier:
Theory of Elasticity, 3. ed.,
McGraw-Hill Book Company,
N. Y., 1970

[2]
Petersen, Christian:
Stahlbau: Grundlagen der Berechnung und baulichen Ausbildung von Stahlbauten.
3., überarbeitete und erweiterte Auflage.
Braunschweig; Wiesbaden Vieweg, 1993

[3]
Himmelblau, D.:
Applied nonlinear programming.
McGraw-Hill Book Company, 1972